ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

Μάθημα: **Στατική ΙΙ** 28 Φεβρουαρίου 2012
Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

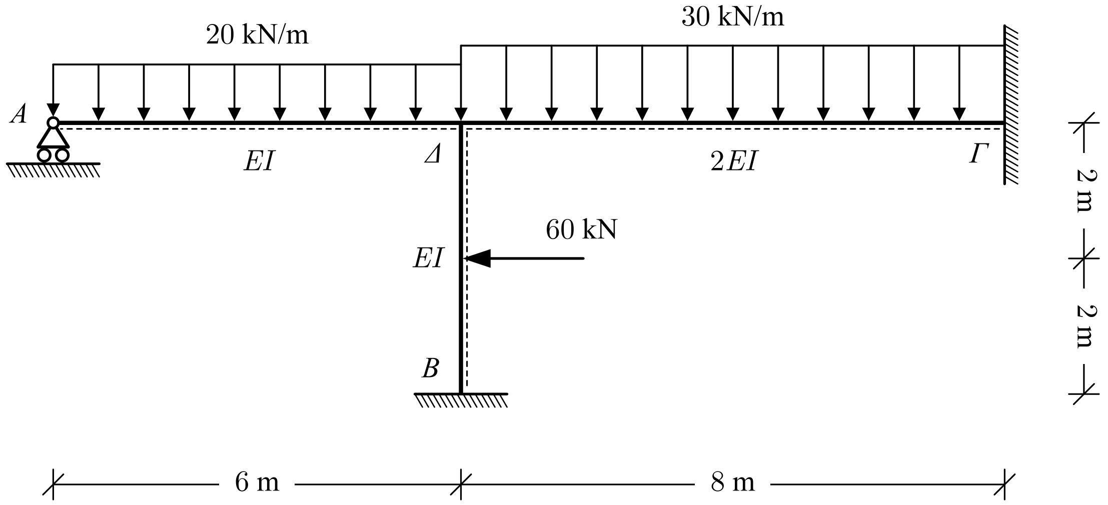
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

($2^η$ περίοδος χειμερινού εξαμήνου 2011-12)

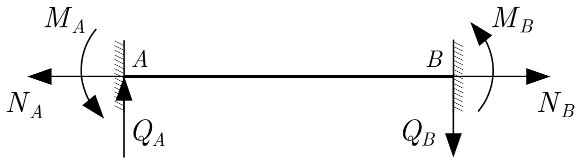
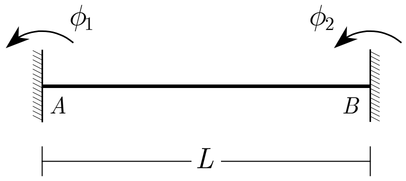
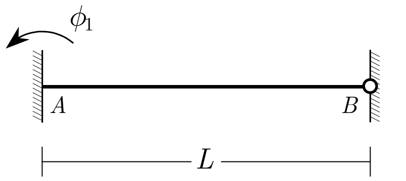
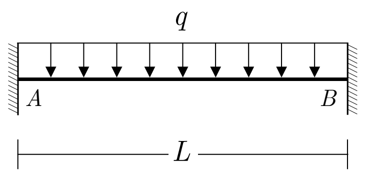
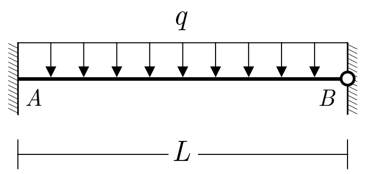
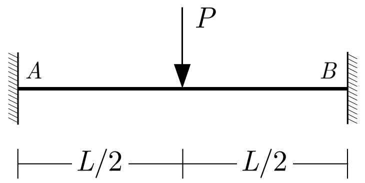
ΘΕΜΑ 1^o (35%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

(α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα άκρα των τριών μελών του φορέα.
(β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις *Α*, *Β* και *Γ* του φορέα.
(γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
(δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Οι πίνακες με τις ακραίες δράσεις αμφιπάκτων και μονοπάκτων δοκών δίνονται στην επόμενη σελίδα.

ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2)$, $M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$, $Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$, $Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}$, $M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}$, $Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $Q_A = \frac{5qL}{8}$, $Q_B = -\frac{3qL}{8}$
	$M_A = \frac{PL}{8}$, $M_B = -\frac{PL}{8}$ $Q_A = \frac{P}{2}$, $Q_B = -\frac{P}{2}$

<u>Επίλυση:</u>

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο *Δ*.

<u>Δοκός *ΑΔ*:</u>

$$M_{\Delta A} = \frac{3EI}{6}\phi - \frac{20 \cdot 6^2}{8} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta A} = \frac{EI\phi}{2} - 90$$

$$Q_{A\Delta} = \frac{3EI}{6^2}\phi + \frac{3 \cdot 20 \cdot 6}{8} \quad \Rightarrow \quad Q_{A\Delta} = \frac{EI\phi}{12} + 45$$

$$Q_{\Delta A} = \frac{3EI}{6^2}\phi - \frac{5 \cdot 20 \cdot 6}{8} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Delta A} = \frac{EI\phi}{12} - 75$$

Δοκός *ΒΔ*:

$$M_{B\Delta} = \frac{2EI}{4}\phi + \frac{(-60)\cdot 4}{8} \quad \Rightarrow \quad M_{B\Delta} = \frac{EI\phi}{2} - 30$$

$$M_{\Delta B} = \frac{4EI}{4}\phi - \frac{(-60)\cdot 4}{8} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta B} = EI\phi + 30$$

$$Q_{B\Delta} = \frac{6EI}{4^2}\phi + \frac{(-60)}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{B\Delta} = \frac{3EI\phi}{8} - 30$$

$$Q_{\Delta B} = \frac{6EI}{4^2}\phi - \frac{(-60)}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Delta B} = \frac{3EI\phi}{8} + 30$$

Δοκός *ΔΓ*:

$$M_{\Delta\Gamma} = \frac{4(2EI)}{8}\phi + \frac{30\cdot 8^2}{12} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta\Gamma} = EI\phi + 160$$

$$M_{\Gamma\Delta} = \frac{2(2EI)}{8}\phi - \frac{30\cdot 8^2}{12} \quad \Rightarrow \quad M_{\Gamma\Delta} = \frac{EI\phi}{2} - 160$$

$$Q_{\Delta\Gamma} = \frac{6(2EI)}{8^2}\phi + \frac{30\cdot 8}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Delta\Gamma} = \frac{3EI\phi}{16} + 120$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = \frac{6(2EI)}{8^2}\phi - \frac{30\cdot 8}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Gamma\Delta} = \frac{3EI\phi}{16} - 120$$

Ισορροπία κόμβου *Δ*:

$$\Sigma M_\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta A} + M_{\Delta B} + M_{\Delta\Gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{EI\phi}{2} - 90\right) + \left(EI\phi + 30\right) + \left(EI\phi + 160\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5EI\phi}{2} + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI\phi = -40}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\Delta A} + B_y - Q_{\Delta\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{EI\phi}{12} - 75\right) + B_y - \left(\frac{3EI\phi}{16} + 120\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{48}(-40) - 195 + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = \frac{1145}{6} = 190.83\,\mathrm{kN}}$$

(προς τα επάνω)

Κόμβος *Α*:

$$A_y = Q_{A\Delta} \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{EI\phi}{12} + 45 = \frac{(-40)}{12} + 45 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = 41.67\,\mathrm{kN}}$$ (προς τα επάνω)

Κόμβος B:

$$M_B = M_{B\Delta} \quad \Rightarrow \quad M_B = \frac{EI\phi}{2} - 30 = \frac{(-40)}{2} - 30 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_B = -50\,\text{kNm}}$$

(δηλ. 50 kNm δεξιόστροφα)

$$B_x = -Q_{B\Delta} \quad \Rightarrow \quad B_x = -\left(\frac{3EI\phi}{8} - 30\right) = -\frac{3\cdot(-40)}{8} + 30 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_x = 45\,\text{kN}}$$

(προς τα δεξιά)

Κόμβος Γ:

$$M_\Gamma = M_{\Gamma\Delta} \quad \Rightarrow \quad M_\Gamma = \frac{EI\phi}{2} - 160 = \frac{(-40)}{2} - 160 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_\Gamma = -180\,\text{kNm}}$$

(δηλ. 180 kNm δεξιόστροφα)

$$\Gamma_y = -Q_{\Gamma\Delta} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_y = -\left(\frac{3EI\phi}{16} - 120\right) = -\frac{3(-40)}{16} + 120 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_y = 127.50\,\text{kN}}$$

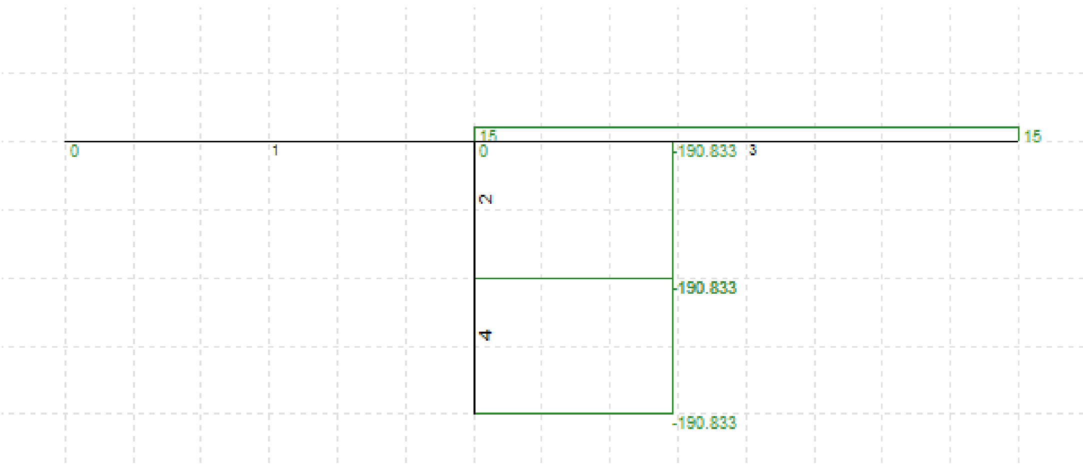
(προς τα επάνω)

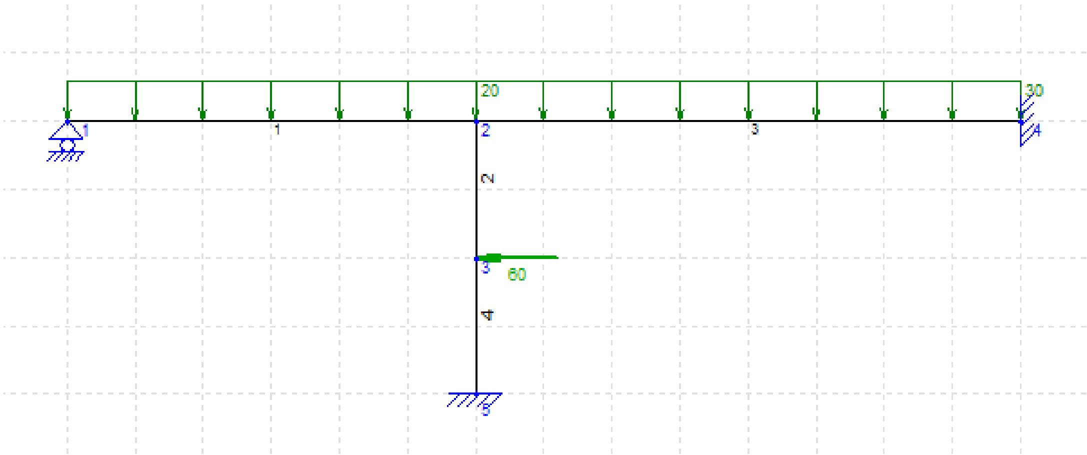
Ισορροπία πλαισίου: (έλεγχος ή εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού B_y)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y + \Gamma_y - 20\cdot 6 - 30\cdot 8 = 41.67\,\text{kN} + B_y + 127.50\,\text{kN} - 360 = 0$$

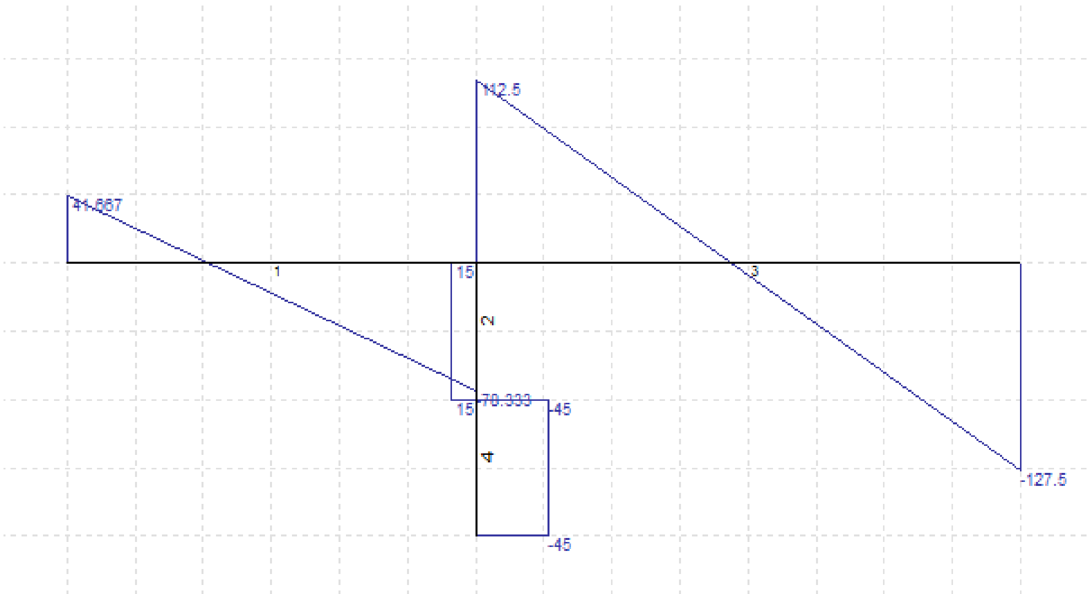
$$\Rightarrow \quad \boxed{B_y = 190.83\,\text{kN}} \quad \checkmark$$

Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N]

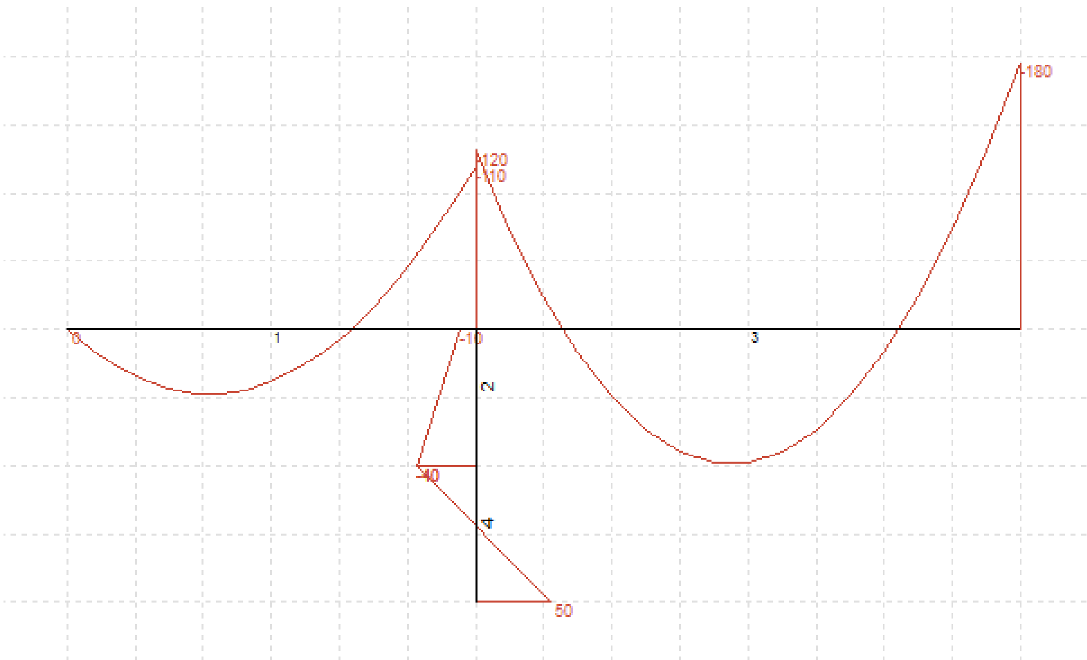




Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων [Q]

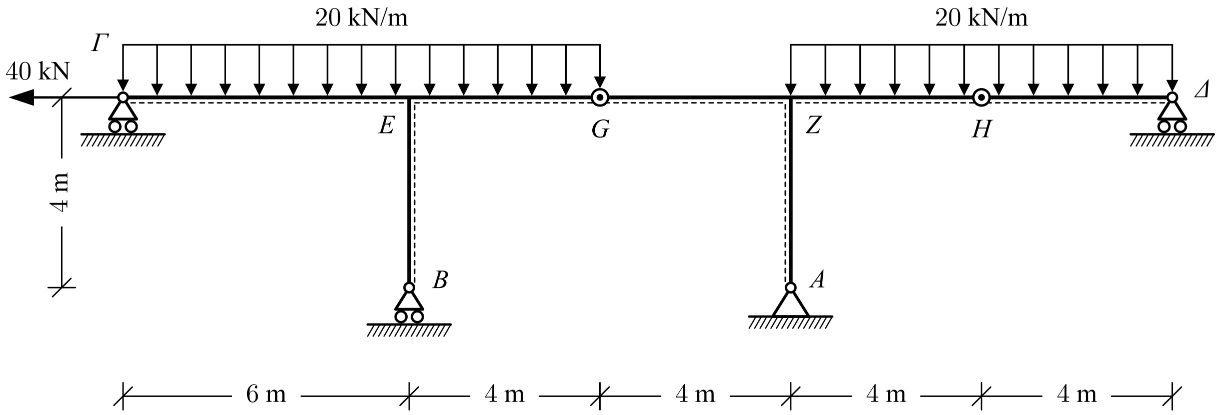


Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών [M]

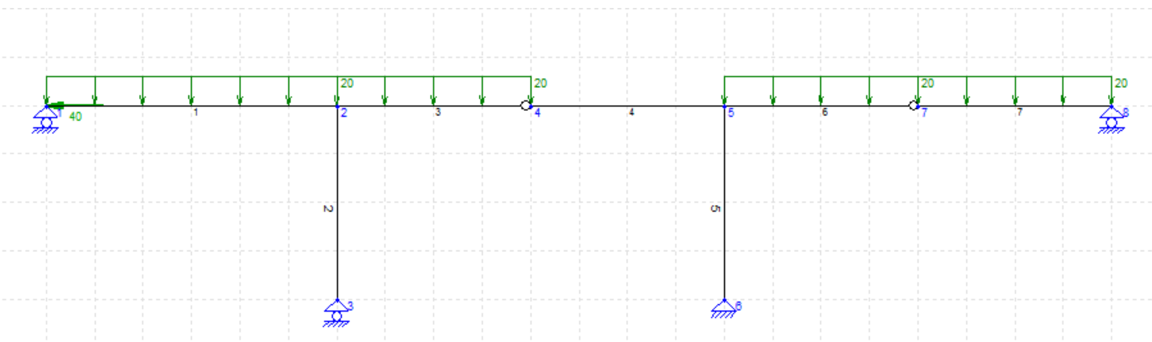


ΘΕΜΑ 2ο (35%)

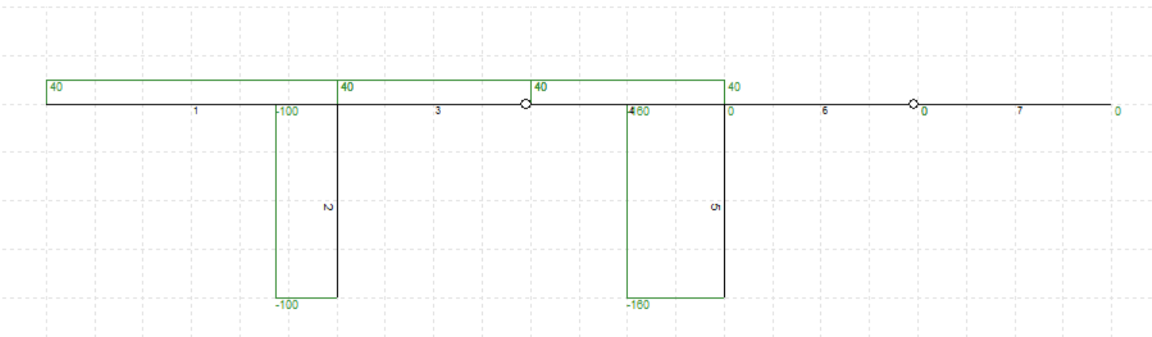
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισιωτού φορέα. Να υπολογισθούν οι τιμές και οι αντίστοιχες θέσεις της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης στο ζύγωμα *ΓΔ* (τρεις διαφορετικές τιμές).



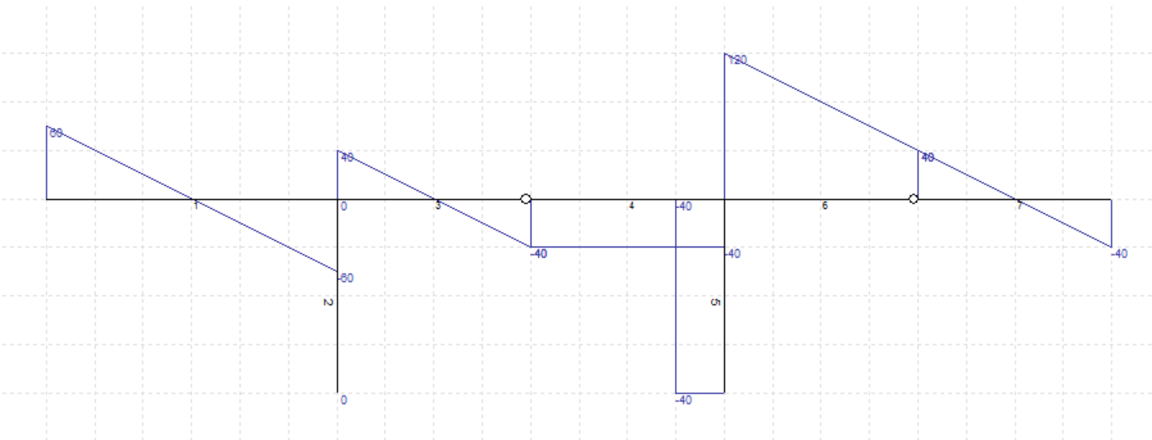
$$\Gamma_y = 60\,\text{kN},\quad B_y = 100\,\text{kN},\quad A_x = 40\,\text{kN},\quad A_y = 160\,\text{kN},\quad \Delta_y = 40\,\text{kN}$$



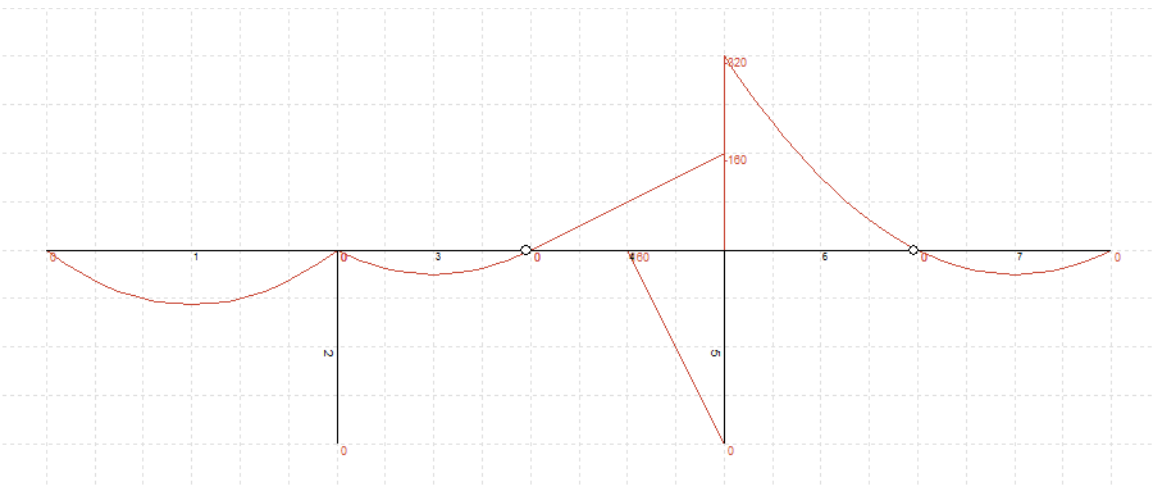
Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N]



Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων [Q]



Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών [M]

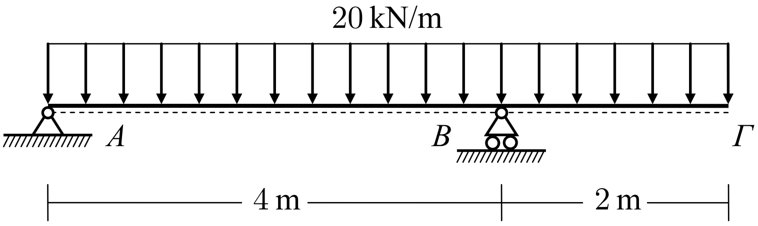


(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> (30%) *(Α' επιλογή)*

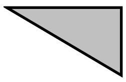
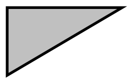
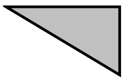
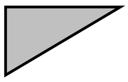
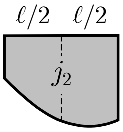
Για την μονοπροέχουσα δοκό του παρακάτω σχήματος ζητούνται η βύθιση w στο άκρο *Γ* του προβόλου και η στροφή ϕ στη στήριξη *Β*. Δίνεται $EI = 20000\,\mathrm{kNm}^2$ και οι σχέσεις υπολογισμού των παραμορφώσεων:

$$w \cdot 1\,\mathrm{kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx \qquad \text{και} \qquad \phi \cdot 1\,\mathrm{kNm} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx$$



Οι πίνακες με τους πολλαπλασιασμούς διαγραμμάτων δίνονται στην επόμενη σελίδα.

Τιμές ολοκληρωμάτων $\int_0^\ell M_j M_k\,dx$

$\int_0^\ell M_j M_k\,dx$	ℓ  k	ℓ  k	ℓ k 
ℓ  j	$\ell\, jk$	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$
ℓ  j	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{3}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{6}\,jk$
ℓ j 	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{6}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{3}\,jk$
$\ell/2$ $\ell/2$ j_1 j_2 j_3  τετραγ. παραβολή	$\ell\,\frac{1}{6}\,k(\,j_1 + 4j_2 + j_3\,)$	$\ell\,\frac{1}{6}\,k(\,2j_2 + j_3\,)$	$\ell\,\frac{1}{6}\,k(\,j_1 + 2j_2\,)$

Επίλυση:

Υπό την δεδομένη φόρτιση η μονοπροέχουσα δοκός του σχήματος κάμπτεται και συνεπώς το άκρο της *Γ* βυθίζεται κατά w_Γ, ενώ στη στήριξη *B* η δοκός στρίβει κατά γωνία ϕ_B. Οι παραμορφώσεις αυτές θα προσδιορισθούν με τη *μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου* (*Αρχή Δυνατών Έργων*).

Σύμφωνα με τη μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου προκειμένου να προσδιορισθεί η εγκάρσια μετατόπιση στο *Γ* (βύθιση) επιβάλλεται στο φορέα μοναδιαία δύναμη στο σημείο αυτό και με διεύθυνση αυτή της ζητούμενης μετατόπισης, δηλαδή εγκάρσια (Φόρτιση 1). Για δε το προσδιορισμό της στροφής στο *B* θα πρέπει στην άρθρωση *B* της δοκού να επιβληθεί μοναδιαία ροπή (Φόρτιση 2).

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών προβόλου για τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση

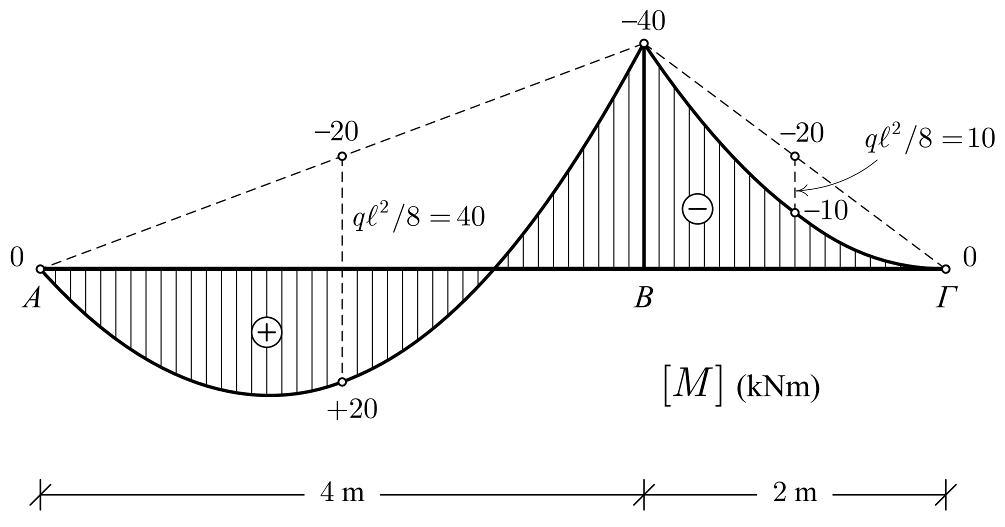
Αντιδράσεις του φορέα:

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; B_y \cdot 4\,\mathrm{m} - (20\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m})\cdot 3\,\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{B_y = 90\,\mathrm{kN}}\Big|$$

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_x = 0\,\mathrm{kN}}\Big|$$

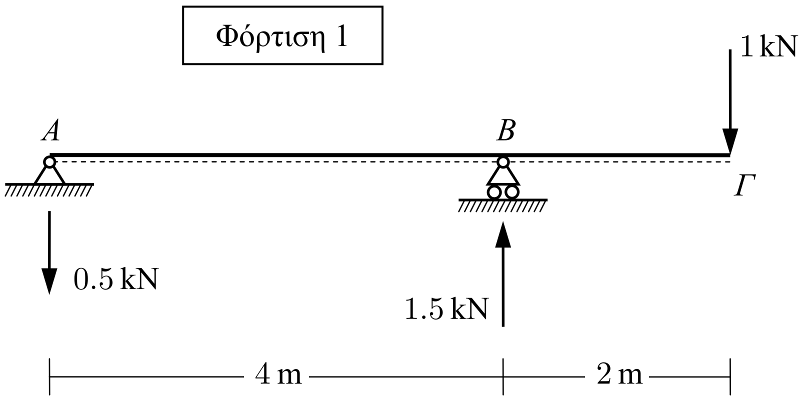
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + B_y - 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_y = 30\,\mathrm{kN}}\Big|$$

Διάγραμμα ροπών του φορέα για τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση που είναι το κατανεμημένο φορτίο $q = 20\,\mathrm{kN/m}$ και η οποία προκαλεί τις ζητούμενες παραμορφώσεις στο άκρο *B*.



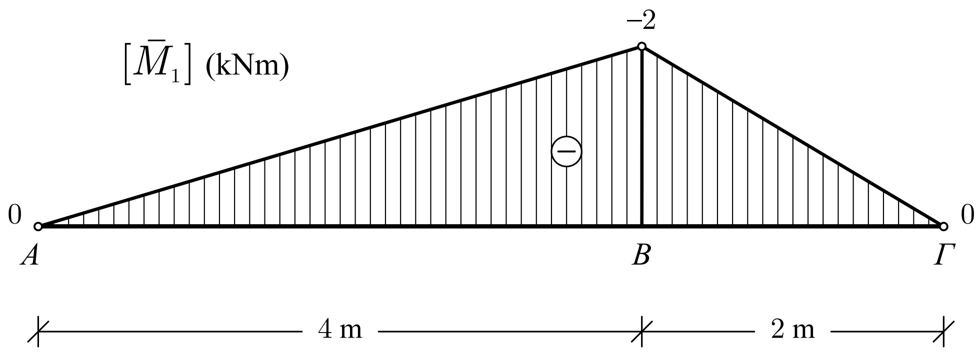
Υπολογισμός βύθισης στο άκρο *Γ* της δοκού

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για να υπολογισθεί η βύθιση στο άκρο *Γ* της μονοπροέχουσας δοκού, θα ασκηθεί στο *Γ* δύναμη, στην κατακόρυφη διεύθυνση και μέτρου 1 kN (βλ. Φόρτιση 2).



Το διάγραμμα ροπών $\bar{M}_1$ του προβόλου για τη μοναδιαία δύναμη δίνεται στο επόμενο σχήμα και αξιοποιείται στη σχέση υπολογισμού της ζητούμενης βύθισης, η οποία παίρνει τη μορφή:

$$w_\Gamma \cdot 1\,\mathrm{kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}_1}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^4 M\bar{M}_1\,dx + \frac{1}{EI}\int_4^6 M\bar{M}_1\,dx$$



Συνεπώς, σύμφωνα με τους πίνακες υπολογισμού του ολοκληρώματος και συγκεκριμένα τις εκφράσεις στα κελιά (4,2) και (4,3), η βύθιση θα υπολογισθεί ως εξής:

$$w_\Gamma \cdot 1\,\mathrm{kN} = \frac{1}{EI}\int_0^4 M\bar{M}_1\,dx + \frac{1}{EI}\int_4^6 M\bar{M}_1\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\underbrace{\Big(\text{παραβολή στο AB, διάγραμμα M}\Big)\times\Big(\text{τρίγωνο στο AB, διάγραμμα }\mathrm{M}_1\Big)}_{\text{υπολογίζεται από τη σχέση στο κελί (4,2) του πίνακα}}$$

$$+ \frac{1}{EI}\underbrace{\Big(\text{παραβολή στο ΒΓ, διάγραμμα M}\Big)\times\Big(\text{τρίγωνο στο ΒΓ, διάγραμμα }\mathrm{M}_1\Big)}_{\text{υπολογίζεται από τη σχέση στο κελί (4,3) του πίνακα}}$$

Αναλυτικότερα:

$$\begin{aligned} w_{\Gamma}\cdot 1\,\mathrm{kN} &= \frac{1}{EI}4\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{6}\left(-2\,\mathrm{kNm}\right)\left[2\left(+20\,\mathrm{kNm}\right)+\left(-40\,\mathrm{kNm}\right)\right] \\ &\quad+\frac{1}{EI}2\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{6}\left(-2\,\mathrm{kNm}\right)\left[\left(-40\,\mathrm{kNm}\right)+2\left(-10\,\mathrm{kNm}\right)\right] \\ &=\frac{1}{6EI}\left[4\,\mathrm{m}\left(-2\,\mathrm{kNm}\right)\left(0\,\mathrm{kNm}\right)+2\,\mathrm{m}\left(-2\,\mathrm{kNm}\right)\left(-60\,\mathrm{kNm}\right)\right] \\ &=\frac{1}{6EI}\left(240\right)\mathrm{m}\left(\mathrm{kNm}\right)^2=\frac{\left(240\right)\mathrm{m}\left(\mathrm{kNm}\right)^2}{6\cdot 20000\,\mathrm{kNm}^2}=\frac{240\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}}{120000} \end{aligned}$$

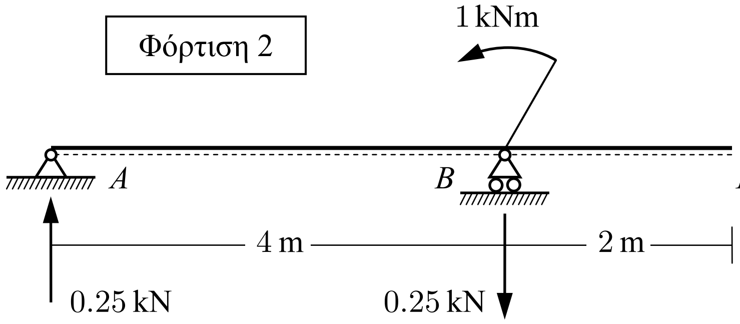
οπότε η βύθιση θα είναι:

$$w_{\Gamma}\cdot 1\,\mathrm{kN}=\frac{240\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}}{120000}\quad\Rightarrow\quad w_{\Gamma}=\frac{2}{1000}\,\mathrm{m}\quad\Rightarrow\quad \underline{w_{\Gamma}=+2\,\mathrm{mm}}$$

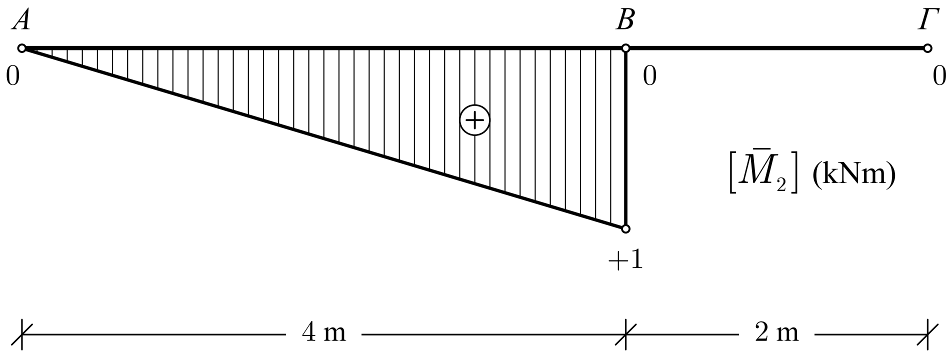
Επομένως, το άκρο *Γ* μετατοπίζεται προς τα κάτω κατά $2\,\mathrm{mm}$.

Υπολογισμός στροφής στο άκρο *B* του προβόλου

Για να υπολογισθεί η στροφή της δοκού στη κύλιση *B*, θα ασκηθεί στο σημείο *B* του βοηθητικού φορέα ροπή μέτρου $1\,\mathrm{kNm}$ (βλ. Φόρτιση 2).



Το διάγραμμα ροπών $\bar{M}_2$ της δοκού για τη μοναδιαία ροπή δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Η σχέση υπολογισμού της ζητούμενης στροφής παίρνει για τη συγκεκριμένη περίπτωση τη μορφή:

$$\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} = \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_2}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^4 M\bar{M}_2\,dx + \frac{1}{EI}\int_4^6 M\bar{M}_2\,dx$$

Από τους πίνακες υπολογισμού του ολοκληρώματος χρησιμοποιείται η έκφραση στο κελί (4,2) για τον υπολογισμό της στροφής:

$$\begin{aligned}\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} &= \frac{1}{EI}\int_0^4 M\bar{M}_2\,dx + \frac{1}{EI}\int_4^6 M\bar{M}_2\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^4 M\bar{M}_2\,dx \\ &= \frac{1}{EI}\underbrace{\Big(\text{παραβολή στο AB, διάγραμμα M}\Big)\times\Big(\text{τρίγωνο στο AB, διάγραμμα }\mathrm{M}_2\Big)}_{\textit{υπολογίζεται από τη σχέση στο κελί (4,2) του πίνακα}}\end{aligned}$$

και αναλυτικότερα θα είναι:

$$\begin{aligned}\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} &= \frac{1}{EI}4\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{6}\Big(+1\,\mathrm{kNm}\Big)\Big[2\Big(+20\,\mathrm{kNm}\Big)+\Big(-40\,\mathrm{kNm}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{6EI}4\,\mathrm{m}\Big(+1\,\mathrm{kNm}\Big)\Big(0\,\mathrm{kNm}\Big) = \frac{1}{6EI}0\,\mathrm{m}\Big(\mathrm{kNm}\Big)^2 \\ &= \frac{0\,\mathrm{m}\Big(\mathrm{kNm}\Big)^2}{6\cdot 20000\,\mathrm{kNm}^2} = 0\,\mathrm{kNm}\end{aligned}$$

Συνεπώς, η βύθιση θα είναι:

$$\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} = 0\,\mathrm{kNm} \quad\Rightarrow\quad \underline{\phi_B = 0\,\mathrm{rad}}$$

Η δοκός, λοιπόν, στο σημείο *Β* δεν θα στρίψει και θα παραμείνει οριζόντια.

(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> (30%) *(Β' επιλογή)*

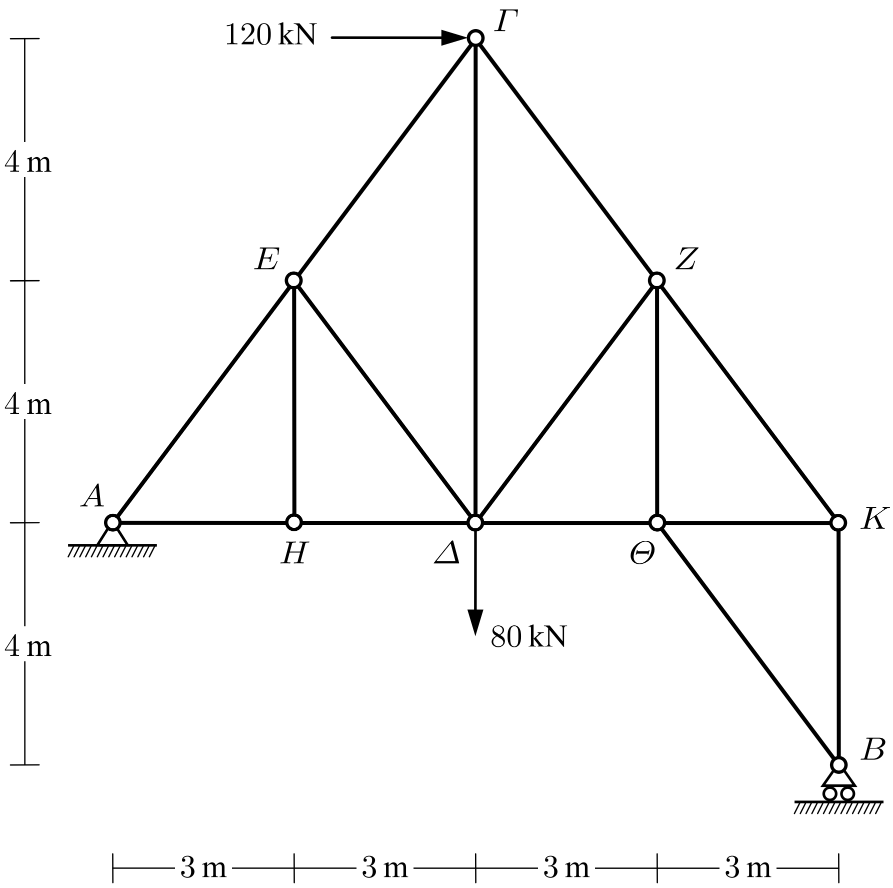
Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

(α) Να προσδιορισθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη.

(β) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των τομών οι δυνάμεις στα μέλη *ΔΖ*, *ΔΘ* και *ΓΖ*.

(γ) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στις ράβδους *ΑΕ*, *ΑΗ*, *ΕΗ*, *ΕΔ* και *ΕΓ*).

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



<u>Επίλυση:</u>